Durée : 4 heures

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, des nombres réels et des nombres complexes. $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$) sont munis de leur structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$) et de leur base canonique. On rappelle qu'à tout endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$) on peut associer sa matrice relativement à une base choisie.

Première partie

A tout couple (v_0, f) formé d'un élément de $\mathbb{C}^2$ et d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^2$ définie par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = f(v_n)$$
$$v_1 = f(v_0)$$

on note $\{v_0, f\}$ cette suite de terme général v_n, de premier terme v_0.

1° *a.* Soit B une base de $\mathbb{C}^2$. On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}^2$ *converge par rapport à* B, vers un élément u de $\mathbb{C}^2$, si les composantes de u_n dans B convergent respectivement vers les composantes de u dans B. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par rapport à B vers u, alors elle converge par rapport à toute base vers u. On dira alors qu'elle *converge* vers u.

b. On suppose que $\{v_0, f\}$ converge vers un élément l de $\mathbb{C}^2$. Montrer que $f(l) = l$. En déduire une condition nécessaire sur le couple (v_0, f) pour que l soit non nul. Cette condition est-elle suffisante?

2° A tout f endomorphisme de $\mathbb{C}^2$, on associe D_f, ensemble des éléments v_0 de $\mathbb{C}^2$ tels que $\{v_0, f\}$ converge. Montrer que D_f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$. On considère l'application $\widehat{f} : D_f \to \mathbb{C}^2$, qui à v_0 associe la limite de la suite $\{v_0, f\}$. Montrer que $\widehat{f}$ est linéaire. On appellera $N_{\widehat{f}}$ le noyau de $\widehat{f}$. Déterminer D_f et $N_{\widehat{f}}$, successivement,

a. quand 1 est valeur propre de f,

b. quand 1 n'est pas valeur propre de f.

(λ_1 et λ_2 étant les valeurs propres de f, on discutera suivant la position du point de coordonnées $(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ dans un quart de plan auxiliaire. On distinguera les cas où f est diagonalisable ou non, et on utilisera des bases convenables de $\mathbb{C}^2$.)

3° On suppose les valeurs propres de f, λ_1 et λ_2, distinctes et de module égal à 1. $\mathbb{C}^2$ étant rapporté à une base convenable, montrer que v_n est représenté par un couple (x_n, y_n) appartenant au produit cartésien de deux cercles de $\mathbb{C}$. (On appelle « cercle de $\mathbb{C}$ de rayon r », l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ de module r.) Décrire l'ensemble $\{(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\}$ selon les valeurs des arguments de λ_1 et λ_2. Cet ensemble peut-il être fini ?

Lorsque cet ensemble n'est pas fini, montrer que tout point de l'un au moins de ces cercles, est limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Deuxième partie

I. Introduction.

1° On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0,$$

x est une fonction réelle de la variable réelle t; $x'(t)$, $x''(t)$ désignent ses dérivées première et seconde en t.

a. Déterminer la solution $t \longmapsto x(t)$ de (E), sur l'intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ telle que $x(n) = x_n$ et $x'(n) = x'_n$ où (x_n, x'_n) est un élément donné de $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que l'application $(x_n, x'_n) \longmapsto (x(n+1), x'(n+1))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire et indépendante de n.

c. Déterminer cette application. On pourra utiliser les couples (1,0) et (0,1) comme couples (x_n, x'_n) particuliers.

2° Répondre aux mêmes questions pour l'équation (E')

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0.$$

II. On considère la famille d'équations différentielles

$$(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad t \in [n, n+1[\qquad x''(t) - 2(-1)^n x'(t) + x(t) = 0.$$

1° (x_0, x'_0) désignant un élément donné de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'on peut choisir une suite $(x_n, x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$, de premier terme (x_0, x'_0) de telle sorte qu'il existe une fonction F unique, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, dont la restriction à $[n, n+1[$ coïncide avec la solution x de E_n telle que

$$x(n) = x_n \qquad \text{et} \qquad x'(n) = x'_n.$$

.../...

ENSET 1980 (B) 1331

2° On choisit $(x_0, x'_0) = (1, 0)$.

Construire la courbe représentative de la restriction de F à [0, 4].

3° (x_0, x'_0) étant quelconque dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\forall p, \quad p \in \mathbb{N} \quad V_p = (x_{2p}, x'_{2p}), \quad W_p = (x_{2p+1}, x'_{2p+1}).$$

Montrer que les suites $(V_p)_{p\in\mathbb{N}}$ $(W_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont respectivement égales à $\{V_0, f\}$ et $\{W_0, g\}$, où f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

4° Étudier la continuité de F'.

5° Montrer qu'il existe des couples (x_0, x'_0), tels que F soit périodique de période paire.

Montrer qu'il n'existe pas d'autre période entière.

6° On suppose $x'_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe un zéro et un seul, z_p, de F sur chaque intervalle $[2p, 2p+2[$, sauf peut-être pour une valeur p_0 de p que l'on déterminera par rapport à $\frac{x_0}{x'_0} = k$. Quelle est la partie entière de z_p, pour $p \neq p_0$?

Troisième partie

On considère maintenant la famille d'équations différentielles

$$(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad t \in [n, n+1[, \quad y''(t) + K_n^2\, y(t) = 0$$

où, pour tout p de $\mathbb{N}$, $K_{2p} = K_0$, $K_{2p+1} = K_1$, K_0 et K_1 sont des constantes réelles positives données, distinctes non nulles.

1° (y_0, y'_0) étant un élément donné de $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe une fonction G définie et dérivable sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, dont la restriction à $[n, n+1[$ est solution de (G_n), et telle que $G(0) = y_0$, $G'(0) = y'_0$. Étudier la continuité de G'.

2° Montrer que la suite de terme général $Y_n = (y_n, y'_n)$ telle que $y_n = G(n)$ $y'_n = G'(n)$ peut être déterminée en fonction de $Y_0 = (y_0, y'_0)$ en utilisant deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.

3° Montrer que l'équation

$$(C) \quad \lambda^2 - \lambda\left(2\cos K_0 \cos K_1 - \left(\frac{K_0}{K_1} + \frac{K_1}{K_0}\right)\sin K_0 \sin K_1\right) + 1 = 0$$

est l'équation caractéristique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui à Y_{2p} associe Y_{2p+2} (notations du 2°).

a. On pose $K_0 - K_1 = d$, $K_0 + K_1 = s$. Donner la condition nécessaire et suffisante sur s et d pour que (C) admette une racine double. Vérifier que cette condition est satisfaite, en particulier, pour certains couples (K_0, K_1) d'entiers composés de multiples entiers de π.

b. Les racines λ_1 et λ_2 de (C) étant réelles distinctes, montrer que tout élément Y_0 de $\mathbb{R}^2$, peut se décomposer en la somme de deux éléments A_{10} et A_{20} de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$\forall p \quad p \in \mathbb{N} \quad Y_{2p} = \lambda_1^p\, A_{10} + \lambda_2^p\, A_{20}$$

On ne cherchera pas à expliciter A_{10} et A_{20}.

Peut-on choisir Y_0 de telle sorte que $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$?

c. λ_1 et λ_2 étant non réelles, distinctes, montrer que G est bornée quel que soit Y_0. (On pourra d'abord donner une interprétation géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: $Y_{2p} \to Y_{2p+2}$.)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur K_0 et K_1 pour que $G(t)$ admette une période $2p_0$ donnée ($p_0 \in \mathbb{N}$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail